

# 関係の恒常性とネットワークのホメオスタシス現象

## 竹 内 幸 子

### Interpersonal homeostasis and network homeostasis

Sachiko Takeuchi

#### Abstract

Various phenomena have recently been studied using network theory. It has been reported that homeostasis on networks can be classified with a mathematical definition. The classification relates to the network's topology.

In this paper, we investigated each type of homeostasis using simple model networks. We found that time dependence and input-flow dependence of the output-node state variables vary according to the type of homeostasis. We also looked into how the homeostasis point moves as the node-interaction changes. We show that the characteristics and the response differ depending on the type of homeostasis phenomenon.

Furthermore, when the input is considered as an external intervention and the output as a support in a human relationship network, the homeostasis phenomenon could be regarded as the robustness of a system, where an increase in intervention does not lead to a rise in support. The methods of changing each kind of network so that homeostasis does not occur anymore, as found in the above specific example, could be linking intervention to smooth support.

In addition, the appendix explains the details of the mathematical definitions of network homeostasis using specific examples.

**Key Words:** infinitesimal homeostasis, structural homeostasis, Haldane homeostasis, null-degradation homeostasis, social network

#### 要旨

近年、様々な事象について、それをネットワーク上のものとして捉え、仕組みを解明しようという研究が進められている。また、ネットワーク上の事象を数学的に定式化することでホメオスタシス（恒常性）現象が分類され、その各類型とネットワークの形状とが関係付けられるようになっている。本稿では、その定式化に沿ったモデルネットワークを具体的に作成し、各ノード変量の時間的変化、入力の大きさに対する変化、及び、ノード間の影響を変えたときのホメオスタシス現象に起きる変化の特徴を類型毎に調べた。その結果、ホメオスタシス現象の類型によってそれらの変化や特徴が異なることを示した。さらに、ネットワークへの入力と出力を人間関係のネットワークにおける外部からの介入と内部の人への支援と見なした場合、ホメオスタシス現象は介入の増加が支援の増加に結びつかないシステムの頑健性として捉えられることを提示した。これにより、上記具体例においてホメオスタシス現象を変化させる方法が、介入をスムーズな支援に結びつける手法に対応する可能性を示した。また、本研究で用いた数学モデルの詳細とホメオスタシス現象が起きうるネットワークの条件について、付録に具体的な例を用いて解説した。

**キーワード：**ネットワーク分析、微小ホメオスタシス、恒常性、数学モデル、介入と支援

## I はじめに

近年、様々な事象について、それが起きる基盤をネットワークと捉えて理解しようとするのが一つの研究分野となっている。例えば、ある銀行の危機がどのように伝播していくか (Brummitt 2015)、あるいは、ある国で始まった感染症が旅客数に応じてどのように流行していくか (Hufnagel 2004) などがネットワーク理論を用いて分析されている。システムが役割を持つ個々のモジュールに区分でき、かつ、モジュール間の相互作用を定量的に扱えるなどの条件はあるが、ネットワーク理論は複雑な事象を分割して理解するための強力なツールとして活用されている。

また、ネットワークに関する数学的理論、特に、ネットワークの形状を特徴付けるトポロジーとネットワークの安定性を結びつける理論も、学際的な研究として広がっている。生物学のホメオスタシス現象も、外部からの刺激 (インプット、入力) の小さな変化に対してシステムが安定 (アウトプット、出力が一定) しているという理解がされうる (Ma 2009)。また、その様なホメオスタシス現象が起き得るネットワークの形状に対する条件も明らかにされつつある。ネットワークのノード変量に対して母関数を仮定した定式化により、より複雑なネットワークの幾何学的性質とホメオスタシス現象との関係について見通しのよい議論が可能となっている (Golubitsky 2020, Wang 2021)。

ネットワーク上を流れる「もの」は、金融ネットワークでは「資金」等であり、生物の代謝機構では「化学物質」である。また、同じネットワーク上でも、流れる「もの」は「材料」や「製品」など場所によって互いに異なるものであってよい。さらに、社会学への応用に見られるように、概念的な「情報」が流れるようなシステムに対しても (例えば Watts 2002, 織田澤 2010)、システムの区分化と流れるものの定量化ができれば、ネットワークによる分析が可能となる。

生物にとってホメオスタシスは重要であるが、社会システムでは却って安定が好ましくない場合もあるだろう。外部からの働きかけ (インプット) によって、ネットワークの中のある人の状態 (アウトプット) を変えたいのに、ネットワークの途中で介入の効果が阻害されてしまったとする。もしかすると、その理由は「ホメオスタシス」かもしれない。その場合は、上記のモデルを用いると、ネットワークのどこを変更したら支援の効果がその人に伝わるのかが予想できる。実際今回の試みでは、簡単な数学モデルであるにもかかわらず、納得し易い解釈のできる結果が得られ、また、安定的にホメオスタシスを解消する変更方法への示唆も得られた。

この研究ノートは、ソーシャルワーカーの方々々が支援を行う際に付加的な視座を得る手掛かりとなることを願ってまとめたものである。第Ⅱ章では、ホメオスタシスの定式化について、単純化した概念例で説明をする。第Ⅲ章では2個または3個のノードを持つネットワークにおいて、ホメオスタシス現象が起きるネットワークの形を紹介する。第Ⅳ章ではそれらを人間関係のネットワークとみなし、ホメオスタシス現象を変化させる方法について述べた。付録では第Ⅲ章に紹介した定式化とホメオスタシス現象が起き得るネットワークの形についての数学的手法を紹介した。実際にモデルを動かしたい方の為に文章中に数式は残したが、Ⅱ-3とAppendix以外はできるだけ数式に依らない説明を心掛けたので、図を見ながら読み進めていただければ幸いである。

## II ホメオスタシスの定式化

### 1 体温調節機構におけるホメオスタシス

図1(a)は、「気温(インプット)の変化に対し、発汗作用による体温調節により、体深部の体温(アウトプット)はほぼ変わらない」というホメオスタシスの現象をネットワークによって模式的に表した図である。矢印は影響がある(「熱量」や「信号」が流れていく)ことを表し、+と-の記号は、及ぼす影響の向きを表す<sup>1)</sup>。気温が高いと体表面に熱が伝わる／体表面の熱が高いと体深部も高くなる(+)／体深部が高いと指令を出す視床下部に正の信号が伝わる(+)／視床下部から発汗機構に信号が伝わる(+)／発汗機構が働くと体表面の熱が下がる(-)システムである。

視床下部と発汗機構(あるいは筋収縮等による発熱機構)をひとまとめにして体温調節機構としたのが図1(b)である。ノード(図中の○で囲まれた部位)の名前も抽象化して  $l, \rho, o$  とした。この研究ノートでは主にこういった3つのノードがあるネットワークを扱うことにする。また、インプットはノード  $l$  に入り、アウトプットは、ノード  $o$  (図中の◎で囲ったノード)の状態とする。

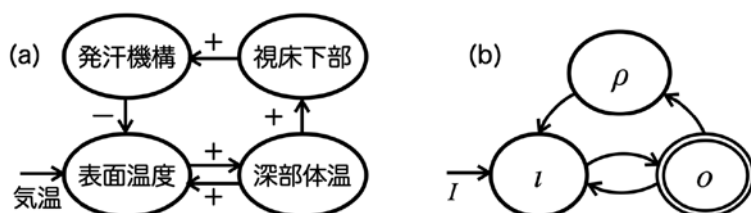


図1 ホメオスタシスのあるネットワークの例：発汗作用による体温調節

### 2 ホメオスタシスを表すモデル

まず、ノード  $\alpha$  を特徴付ける変量  $x_\alpha$  を考える。 $\alpha$  は  $l, \rho, o$  のどれかを表す。上記の表面温度のノードであれば、例えば体表面の持つ単位体積当たりの熱量とすることができる。代謝のネットワークであれば関与する酵素の量とすることが出来る(Ma2009)。これらは時間的に変化する。そして、その時間変化は、単位時間当たりに入ってくる量から出ていく量を引いたものになる。つまり、

$$\dot{x}_\alpha(t) = \left( \alpha \text{ に流入する量} \right) - \left( \alpha \text{ から流出する量} \right) \quad (1)$$

ただし、左辺のドットは時間微分を表す。

さて、外部からの刺激が変化したとして、その後(振動する、発振するなどの事象が起きなければ)、ある時間が経つとネットワークの状態は落ち着くだろう。例えば、気温が変わってしばらく経つと、発汗の働きも体温も一定の状態に落ち着いて変化しなくなるというように、ノード変

量もそれぞれ一定となる。このとき、どのノードでも、 $\dot{x}_\alpha(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) (時間無限大でノード変量の時間微分がゼロ) となる。ただし、これは、例えば汗が止まる訳ではなく、汗の量やシステムに流れる熱や信号の量が一定で時間変化が無くなるという意味である。この落ち着いて一定となったときのアウトプットのノード変量を改めて  $c_o$  と書く (つまり、 $x_o(t) \rightarrow c_o$  ( $t \rightarrow \infty$ ))。インプットフロー  $I$  の大きさを変えると、それにつれて  $c_o$  も変わるだろう。しかし、「 $I$  が  $I_h$  の近くにあるかぎり  $c_o$  は大きく変わらない」というのが、ここにおけるホメオスタシスの条件である。

図 2(a)-(c) に、このシステムのノード変量の時間に対する変化を示した (後述具体例 A-3)。(a) 横軸が時間、縦軸がノード変量  $x_i$ 、 $x_\rho$ 、 $x_o$  の大きさである。時間が経つにつれ、全てのノード変量が一定値  $c_i$ 、 $c_\rho$ 、 $c_o$  になる様子が分かる。(b) インプットフロー  $I$  が同じとき、各ノード変量の落ち着く先  $c_i$ 、 $c_\rho$ 、 $c_o$  は時間がゼロのときのノード変量の値が異なっても別解がない限り同じである。(c) インプットフローが  $I_h$  から少し上下したとき、表面温度  $x_i$  はそれにつれて変化するが、深部体温  $x_o$  は大きくは変わらない。横軸をインプットフローの大きさにして、縦軸に  $c_o$  と  $c_i$  を示した図 2(d) を見ると、このネットワークは、 $c_o$  が  $I_h$  で極値をとっており、実際にホメオスタシスを実現していることがわかる。そのときも、他のノード変量である  $c_i$  はインプットフローの大きさにつれて大きく変わっている。

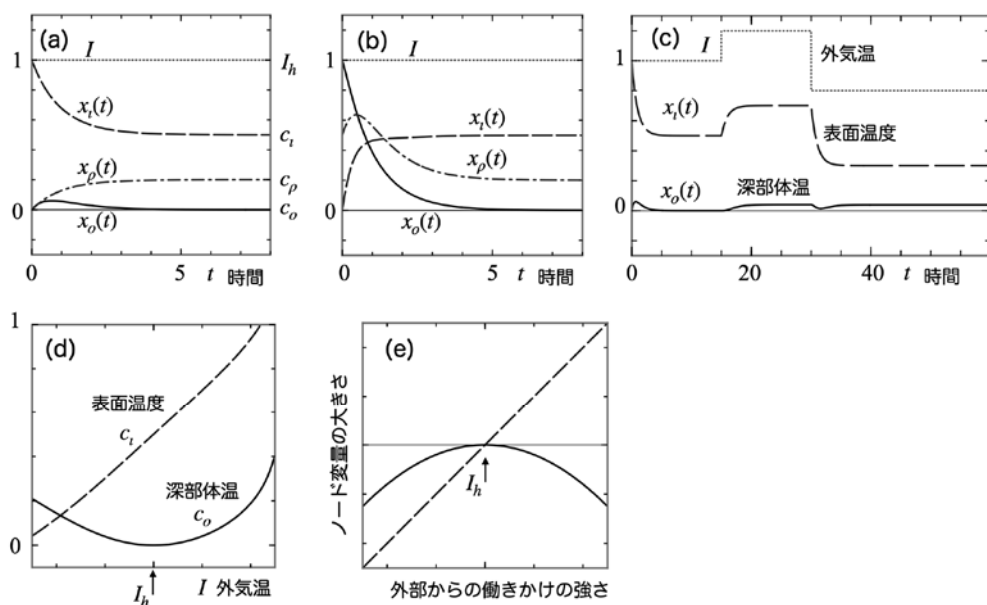


図 2 ノード変量の時間変化、および、インプットとアウトプットの関係。(a)-(c) 発汗作用による表面温度  $x_i$ 、深部体温  $x_o$  等の時間変化。(d) 体温調節におけるアウトプット  $c_o$  とインプットフロー  $I$  の関係。 $I = I_h$  のとき、ホメオスタシス現象が起きている。(e) 外部からの反応がそのまま反映される場合 (破線) と頭打ちになる場合 (実線)。

このモデルは、外気温が高くなるにつれ、表面温度は上がるが、深部体温は大体一定である様子を再現している。ただし、インプットフローが  $I_h$  からあまり遠くないとしているので、図 2(d)(e) のグラフの左右の端までは、必ずしもモデルが適合しているわけではない。図では、 $c_o$  が下に凸であることを示す為に、 $I_h$  から離れた値まで示している。

人間関係のネットワークに応用しようとする場合は、図 2(e) のように、上に凸のグラフで考えた方が分かり易いかもしれない。その場合も定式化の方法や式は同じである。外部からの働きかけを大きくしたとき、直接働きかけた相手の反応は大きくても、それがアウトプットの増加に繋がらない点がある場合の解析モデルとすることができる。

### 3 ホメオスタシスの定式化

さて、ここで微小ホメオスタシス (infinitesimal homeostasis) を以下の式で定義する。インプットのフローの大きさを  $I$ 、時間が経って落ち着いたときのアウトプットのフローの大きさを  $c_o$  とすると、

$$\frac{dc_o}{dI} = 0 \quad \text{at } I = I_h \quad (2)$$

となる。この微分がゼロであるというのが、インプットがある値 ( $I=I_h$ ) の近くで小さく動いても、アウトプットが殆ど変化しないということを示している。また、 $I$  がどのような値でも  $\frac{dc_o}{dI} = 0$  が成立するシステムもあるが、その場合を完全ホメオスタシス (perfect homeostasis) と呼ぶ。式 (1) の右辺を、ノード変数  $x_l(t), x_p(t), x_o(t)$  を引数とする (汎) 関数  $f_\alpha$  と置く。即ち

$$\dot{x}_l = f_l(x_l, x_p, x_o, I), \quad \dot{x}_p = f_p(x_l, x_p, x_o), \quad \dot{x}_o = f_o(x_l, x_p, x_o) \quad (3)$$

とする。インプットが入るノード  $l$  は、ノード変数に加えてインプット  $I$  にも依る関数である。どのノードに対しても  $f_\alpha$  は時間無限大でゼロになる。

ここで、 $f_\alpha$  の  $x_\beta$  に関する偏微分  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}$  を  $f_{\alpha \leftarrow \beta}$  と書き、それがノード  $\alpha$  に対するノード  $\beta$  の影響を表すように  $f_\alpha$  を作成する。常に影響が無い場合 (それはネットワークのグラフで  $\beta$  から  $\alpha$  への矢印が無いことに対応するが)、 $f_{\alpha \leftarrow \beta}$  は  $x_\beta$  に依らない関数とする。すると、 $f_{\alpha \leftarrow \beta}$  は常にゼロであり、 $\beta$  から  $\alpha$  への影響はないことを表せる。また、 $f_{\alpha \leftarrow \alpha}$  はノード  $\alpha$  自体の変化分で、例えば、代謝のホメオスタシスでは化学物質の拡散による減少などにあたり、通常、ゼロか負になると考えられる。正であるときは、他のノードへの流出する分がそれを打ち消さない限り、時間が経つと  $x_\alpha$  が指数関数的に増大していくため、ノード変数が一定の値になるという条件を満たすことができない。

以上のような定式化を行うと、この定式化の下でのホメオスタシス現象の起きうる条件が求められ、それが起きうるネットワークの形が求められる。定式化の詳細は Appendix A を参照。

### Ⅲ ホメオスタシス現象の起きる例

ホメオスタシス現象を前章のように定義すると、ネットワーク上のその現象は大きく分けて 3 種類となる。以下に3個のノードがあるネットワークで例示して説明する。Appendix A-2 参照。

#### 1 単純パスネットワーク

ホメオスタシス現象を起こすネットワークの例の前に、まず、与えられたネットワークから単純パスネットワーク<sup>2)</sup>を抜き出す方法を示す。単純パスネットワークは以下の様に定義される。まず、 $l$  から  $o$  まで、同じノードを2回通らないように矢印に沿ってパスを抜き出す。これを単純パスと呼ぶ。単純パスのみ残り、他の矢印を消去して得られたものが単純パスネットワークである。

図 3 に3個のノードがあるネットワークにおいて、有り得る全ての単純パスネットワークを描いた。(a) の単純パスは  $l \rightarrow o$  の1つ、(b) の単純パスは  $l \rightarrow p \rightarrow o$  の1つ、(c) の単純パスは  $l \rightarrow o$  と  $l \rightarrow p \rightarrow o$  の2つである。(d) は単純パスが無いネットワークであり、 $l$  の状態が  $o$  に影響を及ぼさない場合なので、微小ホメオスタシスではなく、完全ホメオスタシス、つまりアウトプットがインプットに依らない系として載せておく。単純パスの数は図 3(a) と (b) では1、(c) では2、(d) は 0 である。また、図1(b) の単純パスネットワークは図 3(a) となる。

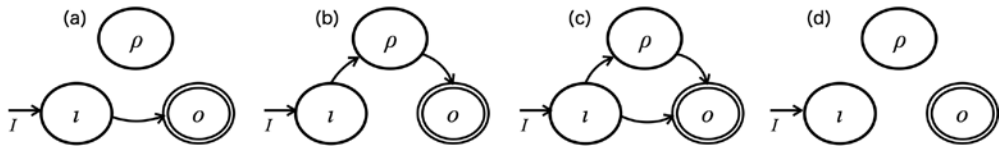


図 3 3つのノードがあるネットワークにおける単純パスネットワークの種類

#### 2 ホメオスタシス現象を表すモデルの例

単純パスネットワークが図 3(a) であるとき、2通りのホメオスタシス（以下では【A】、【B】）がある。(b) であるときは1通り（同、【C】）がある。(c) であるときは2通りのホメオスタシス（同、【D】、【E】）がある<sup>3)</sup>。以下に順に説明をする。後述のように、ホメオスタシス現象は、その性質によって（【A】【C】【E】）、（【B】）、および、（【D】）の3種の類型に大別される<sup>4)</sup>。

【A】  $f_{o \leftarrow l} = 0$  at  $I = I_h$

単純パスネットワークが図 3(a) となるネットワークのうち、ノード  $l$  から  $o$  への単純パスを介した影響が、インプットフロー  $I$  のある値  $I_h$  でゼロになる場合。 $I = I_h$  のときのみゼロになればよく、



$I \neq I_h$  では一般にゼロでない値になる。常にゼロである場合は、 $l$  から  $\rho$  への矢印のない完全ホメオスタシス現象を表したものになる。

具体例 A-1: パスが  $l \rightarrow o$  のみのネットワークを考える。実質はノードが 2 個の (ノード  $l$  とノード  $o$ ) ネットワークである。いま、

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_o(x_l, x_o) = (x_l)^2 - x_o \quad (4)$$

とする<sup>5)</sup>。図 4(a) が対応するネットワークである。 $f_{o \leftarrow l} = 2x_l$  より  $x_l = 0$  の点で  $f_{o \leftarrow l} = 0$ 、つまり、ホメオスタシスの点となる。ノード  $l$  から  $o$  への波線矢印は、影響が  $I = I_h$  のときゼロ、 $I \neq I_h$  でノンゼロになることを表している。また、2 つのノードより外に向けて出ている点線の矢印は、そこに  $f_{l \leftarrow l}$  および  $f_{o \leftarrow o}$  という減少項があることを示している。この例 A-1 でも、時間が経つと  $x_l$  と  $x_o$  はそれぞれ一定の値  $c_l$ 、 $c_o$  に落ち着く。また、図 4(b) を見ると、インプットフローを時間的に  $I_h$  から少し上下させると、それにつれて  $x_l$  は変化するが、 $x_o$  は大きく変わらないということが分かる。図 4(c) にあるように、インプットフローの値  $I$  がある値  $I_h$  の近くである程度変わっても、充分時間が経ったときのノード  $o$  の変量  $c_o$  は余り変化しない。正にホメオスタシス現象が実現されている。

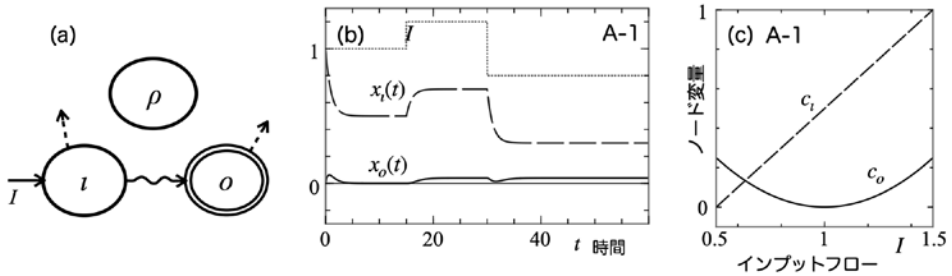


図 4 (a)A-1 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化、(c) 充分時間が経ったときのノード変量  $c_o$  とインプットフロー  $I$  の関係

具体例 A-2: A-1 のネットワークに第三者 ( $\rho$ ) が参加し、以下の様にノード  $o$  とやり取りする場合。A-1 と同じ単純パスとなる。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_\rho, x_o) = -x_\rho + x_o, \quad f_o(x_l, x_\rho, x_o) = (x_l)^2 - x_\rho - x_o \quad (5)$$

すると、 $\rho$  の影響があっても、状態の時間変化やインプットフローとノード変量との関係は、A-1 とほぼ同じとなる。(ネットワークの図は図 5(a)、時間変化の図は省略)

具体例 A-3：体温調節のネットワークモデル

$$f_l(x_l, x_\rho, x_o, I) = I - x_l - (x_\rho)^2 + (x_o)^2, \quad f_\rho(x_\rho, x_o) = -x_\rho + (x_o)^2, \quad f_o(x_l, x_o) = (x_l)^2 - x_o \quad (6)$$

前章で挙げた体温調節のネットワークも、単純パスネットワークは図 3(a) となる。図 2(d) からホメオスタシス現象が起きていることが分かる。ネットワークの図は図 5(b)、時間変化の図は図 2(a)-(c) である。

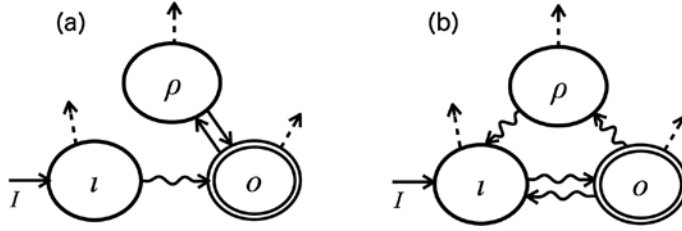


図 5 (a)A-2 と (b)A-3 のネットワークの形。どちらの場合もノード  $l$  から  $o$  への波線の矢印がホメオスタシス現象を引き起こしている。

具体例の A-2 も A-3 も、A-1 より複雑なネットワークだが、ホメオスタシス現象を引き起こしているのは、A-1 と同じく、ノード  $l$  から  $o$  への波線矢印で描かれた影響である。(5)(6) 式の  $f_o$  の右辺第 1 項  $(x_l)^2$  がもし  $x_l$  であれば、 $f_{o \leftarrow l} = 1$  となって微小ホメオスタシス現象は生じない。

【B】  $f_{\rho \leftarrow \rho} = 0$  at  $I = I_h$

単純パスネットワークが図 3(a) となるネットワークで、ノード  $\rho$  の減少が  $I = I_h$  でゼロになる場合。

具体例 B-1：ノード  $\rho$  の減少を表す  $f_{\rho \leftarrow \rho}$  が  $I = I_h$  でゼロになるネットワークを考える。ノード  $o$  の状態が、ノード  $\rho$  に影響し、それが減少せずに逆符号でノード  $o$  に戻る場合となる。以下の式で、 $a=1, b=0$  の場合が、このホメオスタシス現象の起きる場合である。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_\rho, x_o) = -(x_\rho)^2 - b x_\rho + a x_o, \quad f_o(x_l, x_\rho, x_o) = x_l - a x_\rho - x_o \quad (7)$$

図 6(a) は具体例 A-2 の図 5(a) と似ているが、波線のある場所が異なる。図 6(b) を見ると、A-1 より時間はかかるが、この場合もノード変量はある値に収束することが分かる。図 6(c) のノード変量とインプットフローの関係をみると、 $a=1, b=0$  のとき、 $I = I_h$  でホメオスタシス現象が起きていることが分かる。また、図 6(c) には (7) 式中  $a < 1, b=0$  としてノード  $\rho$  とノード  $o$  の関係を往復とも弱めたときの関係も示した。線が途切れているのは、そこより下はノード変量が



振動して時間が経っても一定の値にならないことを示している。関係は  $I > I_h$  で徐々に直線に近づいていくが、ホメオスタシス現象はなくなる。ホメオスタシス現象が消えるのは  $a=0$  のときである。 $a$  が小さいとき、 $I < I_h$  では、時間が経っても  $x_o$  が大きく波打ち、系が不安定になる。図 6(d) には (7) 式の  $a=1$ ,  $b \geq 0$  の場合を示した。 $b > 0$  として  $I = I_h$  でも  $f_{\rho \leftarrow \rho} < 0$  とすると、速やかにホメオスタシス現象が解消していくのが分かる。この場合、 $a$  を小さくしたときのシステムの不安定さは現れない。

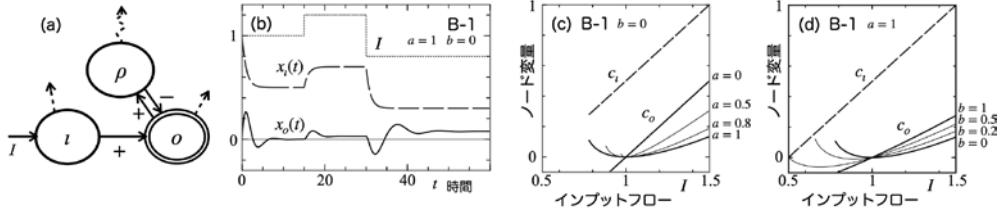


図 6 (a)B-1 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=1, b=0$ )、(c) 充分時間が経ったときのノード変量  $c_o$  とインプットフロー  $I$  の関係で  $a$  を変更した場合 ( $b=0$ )。ノード  $l$  の変量は  $a$  に依らない。(d) 同、 $b$  を 0 から正值に変更した場合 ( $a=1$ )。

具体例 B-2: 同じく  $f_{\rho \leftarrow \rho}$  が  $I = I_h$  でゼロになるネットワークを考える。ノード  $o$  の状態が  $\rho$  に影響し、それが減少せずに、逆符号でノード  $l$  に影響する場合となる。以下の式で、 $a=1, b=0$  の場合が、このホメオスタシス現象の起きる場合である。

$$f_l(x_l, x_\rho, I) = I - x_l - a x_\rho, \quad f_\rho(x_\rho, x_o) = -(x_\rho)^2 - b x_\rho + a x_o, \quad f_o(x_l, x_o) = x_l - x_o \quad (8)$$

図 7(b) より、B-1 より顕著に時間はかかるが、この場合もノード変量はある値に収束することが分かる。図 7(c) のノード変量とインプットフローの関係を見ると、 $a=1, b=0$  のとき、 $I = I_h$  でホメオスタシス現象が起きていることが分かる。また、図 7(c) には (8) 式中  $a < 1, b=0$  としてノード  $o$  からノード  $l$  へのフィードバックを弱めたときの関係も示した。B-1 とよく似た現象が起きているが、時間無限大で系が一定になるインプットフローの範囲は、 $I < I_h$  で小さくなっている。図 7(d) には (8) 式の  $a=1, b \geq 0$  の場合を示した。B-1 と同様、速やかに、そして、 $a$  を変えたときより安定的にホメオスタシス現象が解消していくのが分かる。なお、ノード間の影響が、丁度逆回りの図 (単純パスは図 3(b)) も考えられるが、それは、このタイプのホメオスタシス現象を起こさない。

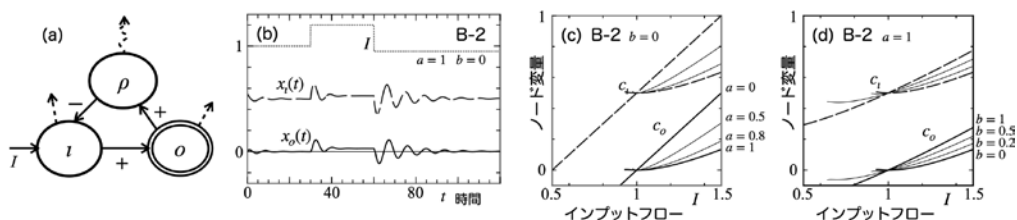


図 7 (a) B-2 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=1, b=0$ )。  $I < I_h$  のときに不安定であるので、他の図より時間を長く、また区間が 3 つ目の  $I$  を  $I_h$  に近く取っている。(c) 充分時間が経ったときのノード変量  $c_o$  とインプットフロー  $I$  の関係で  $a$  を変更した場合 ( $b=0$ )。ノード  $l$  の変量も  $a$  によって変化する。(d) 同、 $b$  を 0 から正值に変更した場合 ( $a=1$ )。

【C】  $f_{o \leftarrow \rho} = 0$ 、または、 $f_{\rho \leftarrow l} = 0$  at  $I = I_h$

単純パスネットワークが図 3(b) となるネットワークで、ノード  $l$  からノード  $\rho$  への影響、または、ノード  $\rho$  からノード  $o$  への影響が  $I = I_h$  でゼロになる場合。

具体例 C-1：ノード  $\rho$  から  $o$  のパスが A の  $l$  から  $o$  のパスと同じくノード変量に比例する場合。 $f_{o \leftarrow \rho}$  が  $2x_\rho$  となっており、ホメオスタシスの点でゼロになる。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_l, x_\rho) = -x_l - x_\rho, \quad f_o(x_\rho, x_o) = a(x_\rho)^2 - x_o \quad (9)$$

図 8(c) から分かるように、(9) 式中  $a < 1$  としてノード  $\rho$  とノード  $o$  の関係を弱めたとき、ホメオスタシス現象は広いインプットフローの区間で起きるようになり、 $a=0$  とすると、ノード  $o$  は他のノードの影響を受けなくなるため、完全ホメオスタシスとなる。

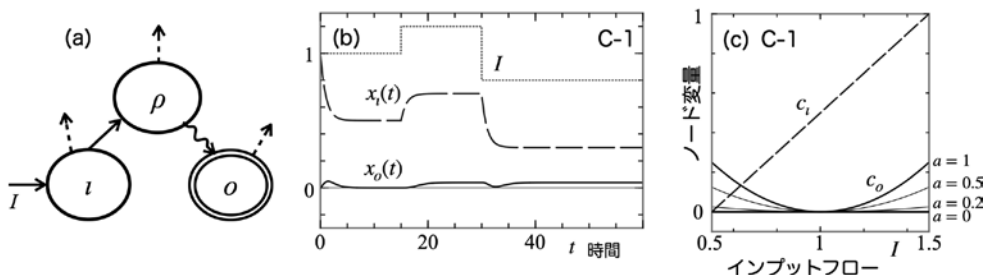


図 8 (a) C-1 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=1$ )、(c) ノード変量とインプットフローの関係。ノード  $l$  の変量は  $a$  に依らない。

具体例 C-2：単純パスネットワークが図 3(b) となるネットワークで、ノード  $l$  からノード  $\rho$  への影響が  $I=I_h$  でゼロになる場合。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_l, x_\rho) = (x_l)^2 - x_\rho, \quad f_o(x_\rho, x_o) = x_\rho - x_o \quad (10)$$

C-1 と同様に、ノード  $l$  から  $o$  に至る単純パスのどこかで、A と同じ現象が起こっている場合。ネットワークの図は、図 8(a) で、ノード  $l$  から  $\rho$  への矢印が波線、 $\rho$  から  $o$  への矢印が直線となったものである。対応する時間変化の図等は C-1 とほぼ同じなので省略する。

【D】  $f_{o \leftarrow \rho} f_{\rho \leftarrow l} = f_{o \leftarrow l} f_{\rho \leftarrow \rho}$ 、かつ、 $f_{\rho \leftarrow \rho} < 0$ 、at  $I=I_h$

単純パスネットワークが図 3(c) となるネットワークで、 $I=I_h$  のときに、片方の単純パスの影響と、もう片方の単純パスの影響が競合し、打ち消し合ってバランスが取れる場合である。ただし、ノード  $\rho$  の  $f_{\rho \leftarrow \rho}$  は負であってゼロではない。

具体例 D-1：インプットフローが大きくなると、ノード  $l$  が直接  $o$  に与える影響は負で大きくなるが、ノード  $\rho$  を介した  $o$  への影響は正で大きくなる場合。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_l, x_\rho) = x_l - x_\rho, \quad f_o(x_l, x_\rho, x_o) = a x_l (x_l - 1) + x_\rho - x_o \quad (11)$$

図 9(c) からわかるように、(10) 式中  $a < 1$  としてノード  $l$  とノード  $o$  の関係を弱めてバランスを崩すと、ホメオスタシスとなる点は大きく変わり、 $a=0$  とすると、ノード  $o$  にはノード  $\rho$  を介した影響しかなくなるため、ホメオスタシス現象が消える。

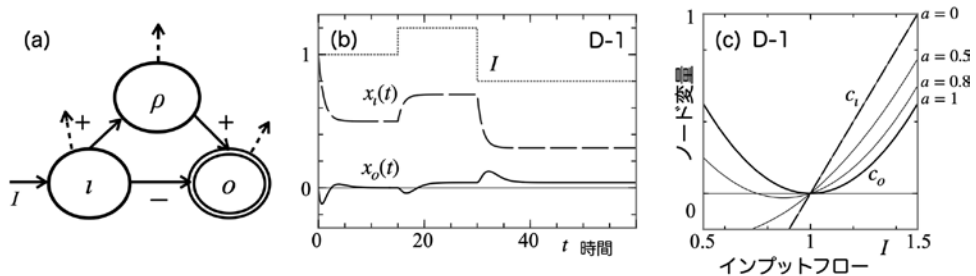


図 9 (a) D-1 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=1$ )、(c) ノード変量とインプットフローの関係。ノード  $l$  の変量は  $a$  に依らない。

【E】 (  $f_{o \leftarrow \rho} = 0$ 、または、 $f_{\rho \leftarrow l} = 0$  )、かつ、 $f_{o \leftarrow l} = 0$  at  $I = I_h$

単純パスネットワークが図 3(c) となるネットワークで、 $I = I_h$  のときに、両方の単純パスのどこかで A と同じ現象が起こっている場合である。

具体例 E-1：ノード  $l$  からノード  $o$ 、ノード  $l$  からノード  $\rho$  の影響の両方がインプットフロー  $I$  のある値でゼロになる場合。

$$f_l(x_l, I) = I - x_l, \quad f_\rho(x_l, x_\rho) = (x_l - a)^2 - x_\rho, \quad f_o(x_l, x_\rho, x_o) = (x_l)^2 + x_\rho - x_o \quad (12)$$

式中  $a=0$  の場合は、2 つのパスともに同じ  $I = I_h$  のときにノード  $l$  からの影響がゼロになるが、 $a \neq 0$  の場合は 2 つの流れが別のところでゼロになる。図 10(c) を見ると、そのときはネットワーク全体としては  $I_h$  (図では  $I_h=1$ ) と  $I_h+a$  の間の点でホメオスタシス現象が起きることが分かる。

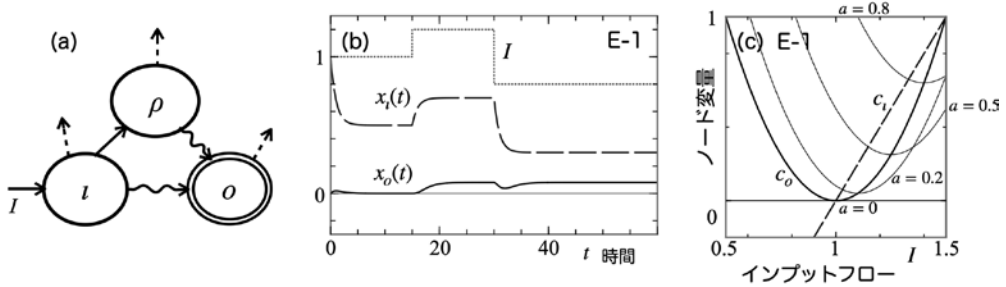


図 10 (a)E-1 のネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=0$ )、(c) ノード変量とインプットフローの関係。ノード  $l$  の量は  $a$  に依らない。

### 3 ホメオスタシスの種類

以上の例は全て 3 つのノードを持つネットワークの例であるが、そこで分かるように、ホメオスタシス現象は、(【A】【C】【E】)、(【B】)、および、(【D】) の 3 種の類型に大別される。

【A】【C】【E】のように、存在する単純パスのすべてで影響がゼロになる場所があることに起因するホメオスタシス現象は Haldane ホメオスタシス (Haldane homeostasis) と呼ばれる。単純パスが 1 個の場合は、そのパスの途中のどこかで【A】のような現象が起きているものである。また、単純パスが複数ある場合は、そのどの単純パス上にも、どこかに【A】のような現象が起きているものである (図 9(a) 参照)。たとえば、以下の具体例のように、2 つあるうちの片方の単純パスにその現象が無い図 11(a) のネットワークでは、全体としてホメオスタシス現象は起きない。

$$f_i(x_i, I) = I - x_i, \quad f_p(x_i, x_p) = ax_i - x_p, \quad f_o(x_i, x_p, x_o) = (x_i)^2 + ax_p - x_o \quad (13)$$

図 11(c) から、式中  $a < 1$  としてノード  $i$  から  $p$  を介してノード  $o$  にいくパスの流量を減らすと、ホメオスタシス現象が現れ、 $a=0$  とすると、 $I=I_h$  のときにホメオスタシス現象を起こすことが分かる。

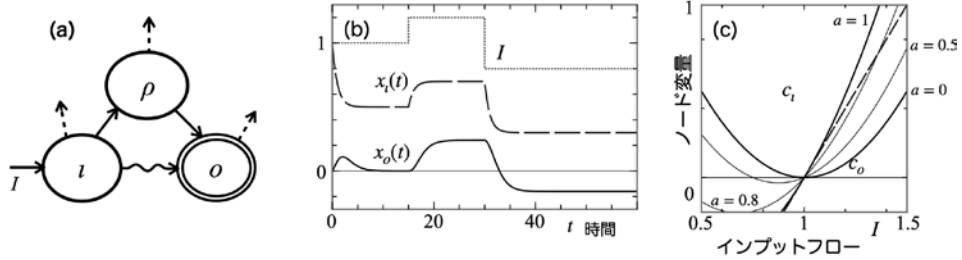


図 11 (a) ネットワークの形、(b) ノード変量の時間変化 ( $a=1$ )、(c) ノード変量とインプットフローの関係。ノード  $i$  の変量は  $a$  に依らない。

【B】のように、自分では減少せず反対の強さで返すノードの存在によるホメオスタシス現象は非減少ホメオスタシス (null-degradation homeostasis) と呼ばれる。ループがホメオスタシス現象に重要な役割をしている種類である。

【D】のように、2 つあるパスが正負でバランスした影響をもたらす結果として現れるホメオスタシス現象は構造的ホメオスタシス (structural homeostasis) と呼ばれる。バランスが崩されれば、ホメオスタシスが起きる点は大きく動いていく。

以上 3 種の微小ホメオスタシスと完全ホメオスタシスが、このような定式化の下でノード 3 個以下のネットワークに現れるホメオスタシスの種類である。この研究ノートでは扱わないが、ノードが 4 個以上のネットワークで起きるホメオスタシス現象も、3 個のノードに現れるものが要素となり組み合わせられて引き起こされること、また、ネットワークのトポロジ的不変量 (ノードやループの数など) と現れ得るホメオスタシス現象を関係づけられることが議論されている (Wang 2021)。

#### IV 人間の関係性としてのネットワーク

前章までで、ある定式化の下でネットワーク上のホメオスタシス現象を定義し、それが現れる条件を 3 つのノードのあるネットワークについて具体例を用いて考えた。ここでは、ノードを人や人の集まりとしたネットワークを考える。(あるいは、1 人の人を、会社の中での人格、家庭内での人格、ソーシャルネットワーキングサービス (SNS) の中での人格等々に分け、別々のノードに

分けることもできるかもしれない)。対象は人間であって、同じ人でも、同一な状況が常に同一な反応をもたらすとは限らないから、関係性をネットワークと見なすことは注意が必要だが、ここでは人の集まりを捉える 1 つの解析モデルとしてネットワークを用いることを試みる。

たとえば、ある集団の中にいる人（ノード  $o$ ）を支援したい、しかし、直接働きかけられるのはその集団の中の別の person（ノード  $i$ ）だとする。あるいは、ある人を家の「外」で支援することはできるが、「内」の立場のその人は直接支援できないとする。そういった人々の集まりをネットワークとみなし、「支援がノード  $i$  からノード  $o$  に上手く伝わる／滞る」を「ホメオスタシス現象が起きない／起きる」と対応させて考えてみたとする。

前章までのグラフでは、ホメオスタシスの起きる点でノード変量は極小値をとる図を示した。しかし、図 2(e) のように、反応が極大値を取る現象としたほうが、分かり易いだろう。つまり、ホメオスタシス現象を、「外部からのノード  $i$  に対する働きかけが増加しても、ある点（ホメオスタシスが起きる点）からノード  $o$  の量が増加しなくなる」現象、つまり、システムの頑健性と呼ぶのである<sup>6)</sup>。そう考えると、さらにノード  $o$  の量を増加させるためには、ホメオスタシス現象を起こさなくする方法を知る必要があるだろう。

前章で紹介したように、微小ホメオスタシス現象を引き起こすものは 3 類型に大別された。それに完全ホメオスタシスを加えて、計 4 つの場合を考える。以下に簡単にまとめる。

- ✓ 【A】【C】【E】に現れた Haldane ホメオスタシスは、言わば「入ってくるフローに対し、こちら辺でよいと思って出力を加減してしまう」ノードがあるために起きる。働きかけた人から支援したい人までのパスが 1 つであれば、そのパスのどこかに、或いは、パスが複数あれば、そのすべてのパスのどこかに「加減してしまう」人がいる場合である。そのような働きを前章では波線矢印で表した。

図 11 の例から分かるように、そのような人がいないパスが 1 つでもあれば、Haldane ホメオスタシスは起きない。ホメオスタシス現象を消して支援を届けるには、直接働きかける人  $i$  を変更したり、新たなパスを作成して Haldane ホメオスタシスを作っている人を迂回したりする必要がある。また、ノード  $o$  自身が「加減をしてしまう」のであれば、そう思えない人からの影響となるパスを用意する必要がある。

或いは、図 10(c) に見られるように、あるパスで「こちら辺でよい」と思う点を変更できれば、他のパスの状況は変わらなくてもノード  $o$  においてホメオスタシス現象の起きる点が変わる可能性がある。

- ✓ 次は、ノード  $i$  から  $o$  へと流れる 2 つのパスがあり、丁度逆の値を流している場合である。【D】に見られるように、インプットに対し、それがそのまま伝わるパスと、逆向きに変換されて伝わるパスがある場合、受け取ったノード  $o$  の状態が停滞する。例えば、働きかけを肯定する人を介するパスと否定する人を介するパスの両方から影響を受け、働きかけに沿って動くことができない状態と見なすことができるだろう。

ホメオスタシス現象を崩すには、このバランスを崩す必要がある。図 9(c) に見られるように、片方のパスの影響を少し弱めるとホメオスタシス現象を起こす点は速やかに動いていく。

- ✓ 3 つ目は、フィードバックがあり、しかも、ループの途中のノードで減少がないシステム【B】



である。具体例 B-1 のように、ノード  $o$  からの影響を減少せず逆符号でノード  $o$  に返すノード  $p$  が存在したり、具体例 B-2 のように、同様に減少せず逆符号でノード  $l$  に返すノード  $p$  が存在したりする場合に起きる。例えば、ネットワークの中に、それがどんな意見でも、意見を聞くと同じ強度でその逆の意見を答える人がいるとする。そういう人の近くで、どちらにも動きづらくなった状態をこのホメオスタシスと見なすことができるだろう。

パラメーターや初期値にもよるが、この種類は、システムが安定するのに他のものより時間が掛かるのが特徴である。一度バランスを崩すと、安定するまで振動して揺れ動く。図 6(c)(d) で線が途切れているのは、そこではノード変量が大きく振動して一定の値に収束しないためである。図 6(c) では、ノード  $p$  と  $o$  の往復の影響を共に弱め、図 7(c) では  $p$  と  $l$ 、および、 $p$  と  $o$  間の影響を弱めた。いずれも、影響がゼロになり、ホメオスタシス現象が完全に無くなるまで大きな振動が起きている。このような形でのシステムへの働きかけは注意深く行う必要があるのかもしれない。

一方、図 6(d)、図 7(d) より、具体例 B-1、B-2 の両方で、ネットワーク外への拡散によるノード  $p$  の変量の減少を図ると、ホメオスタシス現象がより安定的に解消していくことがわかる。この結果は、もし、この解析モデルが適合するような人の集まりであれば、逆の意見を答える人との繋がりを切るよりは、その逆を答える人に対してネットワーク外でノード変量を減少する機会を設けた方が不安定な状況を避けられることを示唆している。

- ✓ 完全ホメオスタシスであるようなネットワークは、働きかけた相手であるノード  $l$  から支援の対象であるノード  $o$  までのパスがないときに現れる。完全ホメオスタシスを消すには、働きかける相手を変えたり、新たなパスを通したりして、支援の影響をノード  $o$  まで及ぼす必要がある。

こうしてみると、数学的な議論によって定式化され類型に分けられたホメオスタシスは、1 つ 1 つ対応させてみると当たり前にみえる現象である。この対応とネットワークによる現実の人間関係のモデル化が適切なときには、上記のように分けられたホメオスタシス現象の性質もまた現状を反映すると思われる。また、ネットワークが複雑になっても、その一部分には上記のような関係が現れると、全体としてアウトプットの反応が停滞することも起きると期待される。

## V 終わりに

この研究ノートでは、近年研究が進むネットワークのホメオスタシス現象の数学的アプローチを紹介し、人間関係のネットワークと解釈できるかについて考察した。もともと、ホメオスタシス現象の研究は、その現象の存在が必須な生物等が対象であったのだが、人間関係のネットワークでは、ホメオスタシス現象が起きることが不都合なこともある。それを踏まえ、先行研究によるホメオスタシス現象の分類について実例を用いて説明し、また、それぞれにおいてホメオスタシス現象をどのように消去、あるいは、ホメオスタシス現象の起きる点を変更することができるかを

まとめた。主観的にはあるが、そのネットワークに起きる現象を人間関係のネットワークに対応させたところ、納得し易い解釈のできる結果が得られた。また、ホメオスタシス現象の類型によって、ホメオスタシスを解消する方法が異なること、安定的に解消できる場合とそうでない場合があることを示した。上記の様な分類が、ソーシャルワーカーの方々が現実の人間関係に向かった際に付加的な視座を得る手掛かりとなることを願っている。

日本社会事業大学の教員の方々には人間関係のネットワークについて実践の話を交えて教えて戴いた。深く感謝する。このネットワークトポロジーの研究を知った切っ掛けは日本物理学会の講演である。そのような試みを通じて参加者の見聞を広げてくださった関係者の方々にも感謝したい。

## Appendix A. ホメオスタシスが起きる条件

### 1 ノードが 2 つのネットワーク

ここでの微小ホメオスタシス現象の定式化には、幾つかの仮定がある。ノードが 2 つ ( $l$  と  $o$ ) のネットワークで説明する。それぞれのノード変数とインプットフローである  $x_l$ ,  $x_o$ ,  $I$  が実数であること (仮定①)、 $x_l$ ,  $x_o$  は時間について微分可能であり、その時間発展を定める関数  $f_\alpha$  が  $x_l$ ,  $x_o$ ,  $I$  について微分可能で

$$\dot{x}_l = f_l(x_l, x_o, I), \quad \dot{x}_o = f_o(x_l, x_o) \quad (\text{A.1})$$

と書けること (仮定②)。インプットフロー  $I$  があるノード  $l$  にのみ入ること (仮定③)。時間が無限大で全ての  $f_\alpha$  がゼロになる解が存在する必要があること (仮定④)。また、インプットフローがホメオスタシスの点であるとき ( $I=I_h$ )、システムの時間発展を表す全部の  $f_\alpha$  が  $I$  について極値を取ること (仮定⑤)。アウトプットのノード変数  $x_o$  が ( $I=I_h$ ) で極値を取るので、 $\frac{dx_o}{dt}$  が不定とならず存在し (仮定⑥)、 $\frac{dx_o}{dt} = 0$  が成立する必要があること (仮定⑦)。これらがこの定式化の仮定となる。

仮定①、②は、ノード変数やインプットフローが有 / 無の 2 値変数などではないことを示す。仮定③は、インプットフローが、例えばアウトプットノードに直接入らないことを含む。仮定④は、たとえばある 2 つのノード間のやり取りが減衰しない振動や発振をしないことを示す。これらは、ホメオスタシス現象を起こすシステムでは納得できる仮定と考えられる。

仮定⑤は、ここでは、すべての  $\alpha$  について、 $\frac{df_\alpha}{dI} = 0$  であると表される。これを、全微分の性質により

$$\begin{aligned}\frac{df_l}{dI} &= \frac{\partial f_l}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dI} + \frac{\partial f_l}{\partial x_o} \frac{dx_o}{dI} + \frac{\partial f_l}{\partial I} \\ \frac{df_o}{dI} &= \frac{\partial f_o}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dI} + \frac{\partial f_o}{\partial x_o} \frac{dx_o}{dI}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

と書き直し、それぞれをゼロと置いて  $\frac{dx_o}{dI}$  について解くと、これは、 $\frac{dx_o}{dI}$  を  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial I}$  と  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}$  ( $= f_{\alpha \leftarrow \beta}$ ) で書き表す式に変形できる。つまり、

$$\frac{dx_o}{dI} = (f_{l \leftarrow l} f_{o \leftarrow o} - f_{l \leftarrow o} f_{o \leftarrow l})^{-1} f_{o \leftarrow l} \frac{\partial f_l}{\partial I} \quad (\text{A.3})$$

$$f_{l \leftarrow l} f_{o \leftarrow o} - f_{l \leftarrow o} f_{o \leftarrow l} \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

である。(A.4) 式は仮定⑥を満たすためのもので、Jacobian の行列式がゼロでないという条件である<sup>7)</sup>。また、仮定③より  $\frac{\partial f_l}{\partial I} \neq 0$  である<sup>8)</sup> から、仮定⑦より、

$$\frac{\partial f_o}{\partial x_l} = f_{o \leftarrow l} = 0 \quad (\text{A.5})$$

がホメオスタシス現象が現れる条件となる。これが、III-2 の【A】の条件となる。

具体例 A-1 のノード間の影響についてまとめると、Jacobian は、

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_l}{\partial x_l} & \frac{\partial f_l}{\partial x_o} \\ \frac{\partial f_o}{\partial x_l} & \frac{\partial f_o}{\partial x_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{l \leftarrow l} & f_{l \leftarrow o} \\ f_{o \leftarrow l} & f_{o \leftarrow o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x_l & -1 \end{pmatrix}, \quad \det J = 1 \quad (\text{A.6})$$

となり、 $f_{o \leftarrow l} = 2x_l$  であって、 $x_l = 0$  の点で、ホメオスタシス現象が起きる条件を満たす。確かに図 4(c) から (実はここでの式の  $x_l$  は  $x_{l-c_l^{(h)}}$  のことであるので)、 $x_{l-c_l^{(h)}} = 0.5$  のとき  $\frac{dx_o}{dI} = 0$  になっていることが読み取れる。

## 2 ノードが3つのネットワーク

同様に、3つのノードがあるネットワークでも条件を考える。(A.1), (A.2)に対応する式は、

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, x_\rho, x_o, I), \quad \dot{x}_\rho = f_\rho(x_i, x_\rho, x_o), \quad \dot{x}_o = f_o(x_i, x_\rho, x_o) \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dI} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dI} + \frac{\partial f_i}{\partial x_\rho} \frac{dx_\rho}{dI} + \frac{\partial f_i}{\partial x_o} \frac{dx_o}{dI} + \frac{\partial f_i}{\partial I} \\ \frac{df_\rho}{dI} &= \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dI} + \frac{\partial f_\rho}{\partial x_\rho} \frac{dx_\rho}{dI} + \frac{\partial f_\rho}{\partial x_o} \frac{dx_o}{dI} \\ \frac{df_o}{dI} &= \frac{\partial f_o}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dI} + \frac{\partial f_o}{\partial x_\rho} \frac{dx_\rho}{dI} + \frac{\partial f_o}{\partial x_o} \frac{dx_o}{dI} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。これらがゼロであるという方程式を解いて、 $\frac{dx_o}{dI}$  を求めると、逆行列を求めることとなり、

$$\frac{dx_o}{dI} = -(\det J)^{-1} \det \begin{pmatrix} f_{\rho \leftarrow i} & f_{\rho \leftarrow \rho} \\ f_{o \leftarrow i} & f_{o \leftarrow \rho} \end{pmatrix} \left( \frac{\partial f_i}{\partial I} \right) = (\det J)^{-1} (f_{\rho \leftarrow \rho} f_{o \leftarrow i} - f_{o \leftarrow \rho} f_{\rho \leftarrow i}) \left( \frac{\partial f_i}{\partial I} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \frac{\partial f_i}{\partial x_\rho} & \frac{\partial f_i}{\partial x_o} \\ \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} & \frac{\partial f_\rho}{\partial x_\rho} & \frac{\partial f_\rho}{\partial x_o} \\ \frac{\partial f_o}{\partial x_i} & \frac{\partial f_o}{\partial x_\rho} & \frac{\partial f_o}{\partial x_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i \leftarrow i} & f_{i \leftarrow \rho} & f_{i \leftarrow o} \\ f_{\rho \leftarrow i} & f_{\rho \leftarrow \rho} & f_{\rho \leftarrow o} \\ f_{o \leftarrow i} & f_{o \leftarrow \rho} & f_{o \leftarrow o} \end{pmatrix}, \quad \det J \neq 0 \quad (\text{A.10})$$

となる。(A.9) 式と仮定⑦より、

$$f_{\rho \leftarrow \rho} f_{o \leftarrow i} = f_{o \leftarrow \rho} f_{\rho \leftarrow i} \quad (\text{A.11})$$

がホメオスタシス現象が現れる条件となる。(A.11) 式は、III の【A】 から【E】 までのすべての例で満たされており、逆に、これを満たす条件を類別してホメオスタシス現象の種類が調べられる (Golubitsky 2020)。即ち、図 3(a) が単純パスネットワークであるネットワークでは (A.11) 式の右边が常にゼロであり、従って  $I=I_h$  のときに【A】  $f_{o \leftarrow i}=0$ 、または、【B】  $f_{\rho \leftarrow \rho}=0$  であることが  $I=I_h$  でホメオスタシス現象の現れる条件となる。図 3(b) であるものは左辺が常にゼロであるので、【C】  $f_{o \leftarrow \rho}=0$ 、または、 $f_{\rho \leftarrow i}=0$  が条件となる。2つの単純パスがある図 3(c) では、 $f_{\rho \leftarrow \rho} < 0$  で (A.11) 式がそのまま成立している【D】 と、【A】 と【C】 が同時に起きる【E】 の場合が条件となる。

例えば、具体例 A-3 のノード間の影響についてまとめると、Jacobian は、

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} -1 & -2x_\rho & 2x_o \\ 0 & -1 & 2x_o \\ 2x_i & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det J = -8 x_i x_\rho x_o + 4 x_i x_o - 1, \\ \det \begin{pmatrix} f_{\rho \leftarrow i} & f_{\rho \leftarrow \rho} \\ f_{o \leftarrow i} & f_{o \leftarrow \rho} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x_i & 0 \end{pmatrix} = 2x_i \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となり、やはり、 $x_l=0$  の点で、ホメオスタシス現象が起きる条件を満たすことがわかる。

3 つ以上のノードがある場合も、考え方は同じであり、一般に Jacobian と逆行列の中の余因子行列でホメオスタシス現象が起きる条件を書くことができる。また、本稿でいう【B】、つまり、ループがホメオスタシス現象に重要な役割をしている場合とそれ以外の場合に分け、さらに、行列の性質を考えることにより、ネットワークの分割を考えて行くことが可能となり、ホメオスタシス現象とネットワークのトポロジーの関係の議論が進んでいる (Wang 2021)。

## Appendix B

この研究ノートでは、時間微分を示す関数が  $x_\alpha$  の 2 次までとる近似を用いて具体例を作成した。ここで、式の中の  $I$  は実際は  $(I-I_h)$  のこと、 $x_\alpha$  は  $(x_\alpha(t)-c_\alpha^{(h)})$  のことを省略して書いたものである。ただし、 $c_\alpha^{(h)}$  は、 $I=I_h$  での時間無限大のときの  $x_\alpha$  の値である。

$$f_\alpha = \sum_{\beta\gamma} a_{\beta\gamma}^\alpha x_\beta x_\gamma + \sum_\beta b_\beta^\alpha x_\beta \quad (B.1)$$

定数項がないのは、 $I=I_h$  で時間が無限大になるとき、 $f_\alpha=0$  としたためである。また、この研究ノートの具体例としては、第 1 項は  $\beta=\gamma$  のもののみを採用している。

このとき、ノード  $\beta$  から  $\alpha$  への影響  $f_{\alpha\leftarrow\beta}$  は、

$$f_{\alpha\leftarrow\beta} = a_{\beta\beta}^\alpha x_\beta + \sum_\gamma a_{\beta\gamma}^\alpha x_\gamma + b_\beta^\alpha \quad (B.2)$$

となる。

この 2 次までという式は振動解や発振解を含み、具体例 B-1 に見られるように、ホメオスタシス現象の起きる点からインプットフローが離れると、仮定④が満たされない場合がある。また、椅子型のように一度停滞してからまた上がっていく反応を再現できない。3 次式を含めた式、また、 $I=I_h$  の周りのテイラー展開の 1 次が上記と一致する  $x_\alpha/(1+x_\alpha)$  のような形が、実際の解析 (Ma2009) では用いられている。

### 注

- 1) この  $+$  記号は、影響そのものの正負ではなく、ノード  $\beta$  の変量  $x_\beta$  が増えるにつれてノード  $\beta$  から  $\alpha$  への影響  $f_{\alpha\leftarrow\beta}$  が増えると  $+$ 、減ると  $-$  とした。
- 2) これは、Golubitsky 2020 ではコアネットワークと呼ばれているが、後の Wang 2021 では、コアネットワークはもう少し広い概念になっているので、このノートでは、これを単純パスネットワークと呼ぶことにする。
- 3) これらの場合に限られる理由は、Appendix の (A.11) 式以下の文章を参照されたい。
- 4) 数値計算は Mathematica12.2 による。https://researchmap.jp/sachiko.takeuchi/published\_works にファイルを公開。

- 5) 式(4)、および、その後の式の中の  $I$  は実際は  $(I-I_h)$  のこと、 $x_\alpha$  は  $(x_\alpha(t)-c_\alpha^{(h)})$  のことを省略して書いた。ただし、 $c_\alpha^{(h)}$  は、 $I=I_h$  での時間無限大のときの  $x_\alpha$  の値である。このノートの図では、 $I_h=1$ ,  $c_l^{(h)}=0.5$ ,  $c_p^{(h)}=0.2$ ,  $c_o^{(h)}=0$  としたものを描いている。
- 6) Ⅲ章までのグラフでは、 $f$  として2次関数を採用していたため、ノード変量はホメオスタシス現象の起きる点は常に下に（或いは上に）凸であった。このノートでは取り扱わないが、3次以上の関数を入れると、ホメオスタシス現象の起きる点から上は一定、あるいは、しばらく経ってもう一度上がっていく椅子状の振る舞いを表すこともできる。
- 7) 仮定⑤があれば、その中で仮定⑥⑦を満たす条件を探せるが、仮定⑥⑦を満たすために（つまりホメオスタシス現象の成立のために）仮定⑤を課してしまってよいかは議論が必要と考えられる。
- 8) このノートの具体例では、すべて  $\frac{\partial f_i}{\partial t} = 1$  としている。

## 参考文献

- Brummitt, Charles D., and Teruyoshi Kobayashi. 2015. "Cascades in multiplex financial networks with debts of different seniority." *Physical Review E* 91 (6): 062813. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062813>. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062813>.
- Golubitsky, Martin, and Yangyang Wang. 2020. "Infinitesimal homeostasis in three-node input-output networks." *Journal of Mathematical Biology* 80 (4): 1163-1185. <https://doi.org/10.1007/s00285-019-01457-x>. <https://doi.org/10.1007/s00285-019-01457-x>.
- Hufnagel, Lars, Dirk Brockmann, and Theo Geisel. 2004. "Forecast and control of epidemics in a globalized world." *Proceedings of the national academy of sciences* 101 (42): 15124-15129.
- Ma, Wenzhe, Ala Trusina, Hana El-Samad, Wendell A. Lim, and Chao Tang. 2009. "Defining Network Topologies that Can Achieve Biochemical Adaptation." *Cell* 138 (4): 760-773. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2009.06.013>.
- Wang, Yangyang, Zhengyuan Huang, Fernando Antoneli, and Martin Golubitsky. 2021. "The structure of infinitesimal homeostasis in input-output networks." *Journal of Mathematical Biology* 82 (7): 62. <https://doi.org/10.1007/s00285-021-01614-1>.
- Watts, Duncan J. 2002. "A simple model of global cascades on random networks." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99 (9): 5766-5771.
- 織田澤利守, 八木亮輔, and 川松祐太. 2010. "社会的ネットワークにおける協調形成に関するゲーム理論分析: ネットワーク・トポロジーに着目して." 土木計画学研究・講演集 42.



p.28 図 8(c)

$a = 0.2$ の線は $a = 0.1$ の計算結果である。

p.29 図 9(c)、p.30 図 10(c) 、p.30 図 11(c)

縦軸の最大値は 1 ではなく 0.5、 $c_l$ の線は $c_l^{(h)} = 0$ の場合のものである。

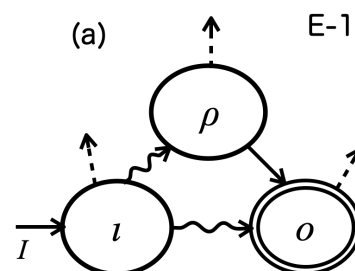
その他の図は、38 ページの注 5)にあるように、 $I_h = 1$ ,  $c_l^{(h)} = 0.5$ ,  $c_p^{(h)} = 0.2$ ,  $c_o^{(h)} = 0$ とした場合について描いている。

p.30 図 10(a)

ノード  $l$  から  $p$  に繋がる線は波線で、ノード  $p$  から  $o$  に繋がる線は直線である。

訂正済みの図、及び、Mathematica ファイルは、以下からご覧下さい。

[https://researchmap.jp/sachiko\\_takeuchi/published\\_works](https://researchmap.jp/sachiko_takeuchi/published_works)



Sachiko Takeuchi “Interpersonal homeostasis and network homeostasis,”  
Journal of Social Policy and Social Work No.71, p.19

Erratum, April 10, 2025

p.28 Figure 8(c):

The line  $a = 0.2$  in the figure should read as line  $a = 0.1$ .

p.29 Figure 9(c), p.30 Figure 10(c), and p.30 Figure 11(c):

The maximum value on the vertical axis is 0.5, not 1. The line  $c_l$  corresponds to the case  $c_l^{(h)} = 0$ .

All other figures are drawn for  $I_h = 1$ ,  $c_l^{(h)} = 0.5$ ,  $c_p^{(h)} = 0.2$ ,  $c_o^{(h)} = 0$  as described in Note 5 (p.38).

p.30 Figure 10z(a)

The line from node  $l$  to  $p$  should read as a wiggly line, and the line from node  $p$  to  $o$  should read as a straight line.

Please see the corrected figures and Mathematica files below:

[https://researchmap.jp/sachiko\\_takeuchi/published\\_works](https://researchmap.jp/sachiko_takeuchi/published_works)